注意：この問題は数研部員が独自に作成した予想問題です。学校とは一切関係ありません。

2021年度

高等部入学試験問題

数　　　学

（60分間）

【注 意 1】

1. 問題は，$\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までです。

2. 答えは，すべて別紙の解答用紙に記入しなさい。

【注 意 2】

1. 答えは，最も簡単な形で書きなさい。

2. 分数は，これ以上約分できない分数の形で答えなさい。

3. 根号のつく場合は，$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$のように根号の中を最も小さい正の整数にして答えなさい。

【注意】受験番号は，算用数字で横書きにすること。

受験番号				

氏名	

1　次の各問いに答えよ。

（１）　次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{2}}{x}+\dfrac{\sqrt{3}}{y}=3 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}}{x}+\dfrac{\sqrt{2}}{y}=3 \end{cases}$$

（２）　あるクラスで数学のテストをしたところ，A 君から F 君のそれぞれの点数とその合計が以下の表のようになった。点数のメジアンが 6 のとき，a と b の値を求めよ。ただし，a と b は正の整数とする。

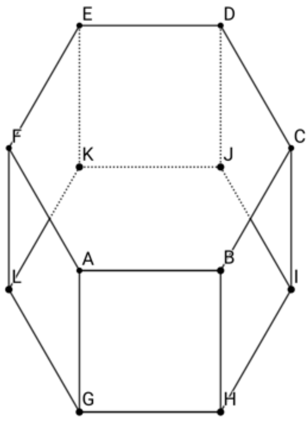
A	B	C	D	E	F	計
5	8	a	3	6	b	a^2

（3） 一定の量の水が絶えず流入する貯水池がある。今の放水量では 48 日後に貯水池が空になる。しかし雨が多い影響で今後の流入量が今の 2 倍になり，48 日後に貯水池を空にするためには放水量を今より 25%増やさなければならないことが分かった。このとき，放水量を変えずに放水すると予定より何日多く放水することになるか。

（4） $x=-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{7}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$y=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}$とする。このとき，$x^2-2y^2-xy+2x+5y-3$の値を求めよ。

2　次の各問いに答えよ。

（1）　下図のような正六角柱 ABCDEF−GHIJKL を考える。



①　AB の長さをa，AG の長さをhとする。ある球がこの正六角柱のすべての辺に接しているとき，aとhの比を求めよ。

②　AB の長さが 1，AG の長さが 2 とする。ある球O_1が上面 ABCDEF の 6 つの辺と底面 GHIJKL の 6 つの辺すべてに接している。それに内接し，元の正六角柱 ABCDEF−GHIJKL と相似な正六角柱 A’B’C’D’E’F’ − G’H’I’J’K’L’を作る。

さらに，この正六角柱 A’B’C’D’E’F’ − G’H’I’J’K’L’の上面と底面の 12 本の辺すべてに接するような球O_2を作る。同様の操作を繰り返してO_4を作ったとき，その半径を求めよ。

（２）　A さんと B さんが以下の手順に従ってゲームをする。

ゲームの手順

① まず 2 人がじゃんけんをする。この時，勝った人は 2 ポイント，負けた場合は−2 ポイント，引き分けた場合は双方に 0 ポイントを与える。

② 勝った人から順に 1〜13 の数字が書かれたカードを引き，引いた数の約数の個数を考える。

③ ①で得たポイントと②で求めた約数の個数の積をその人が得るポイントとする。

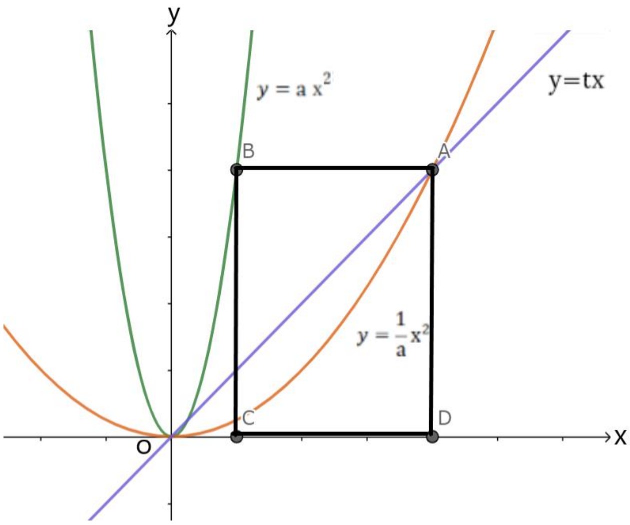
ただし，②で引いたカードに書かれた数字の約数の和が奇数になった場合は③の符号を変える。

次の各問いに答えよ。なお，引いたカードは戻さないものとする。

① A さんが B さんに勝つ確率を求めよ。

② A さんと B さんが 6 ポイント差になる確率を求めよ。

3　下の図のように，座標平面上に関数$y=ax^2$，$y=\frac{1}{a}x^2$（$a>1$）と$y=tx$（$t>0$）のグラフをかく。$y=ax^2$と$y=tx$の原点ではない方の交点を点A, x軸に平行で点Aを通る直線と$y=ax^2$の交点を点B x軸上にあり四角形ABCDが長方形になるような点Cと点Dをそれぞれとる。このとき，次の各問いに答えよ。

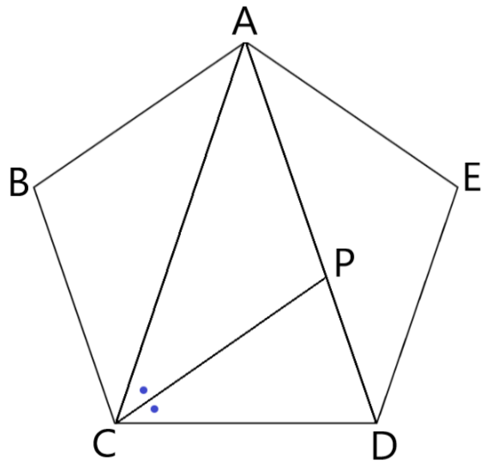


（1）　点Bの座標をaとtを用いて表せ。

（２） $y=tx$と線分 BC の交点を P，$a=3$ としたときの△ABP と△OCP の面積の比を求めよ。

（３） 長方形 ABCD が正方形になるとき，その面積をaを用いて表せ。

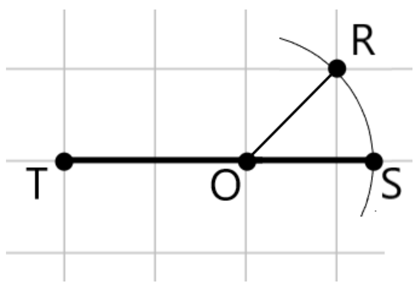
4　一辺の長さが 2 の正五角形 ABCDE がある。∠ACD の二等分線と AD の交点を P とするとき，次の各問いに答えよ。



（1）　AC と PD の長さをそれぞれ求めよ。

（2）　格子上の 1 マスの辺の長さを 1 とする。

（例）　左図のようにマスの対角線上に OR を引くとその長さは$\sqrt{2}$であり，コンパスで O を中心に R を通る線を引くことで格子線上に長さが$\sqrt{2}$の線分 OS が書ける。また O に対して S と反対側に OT＝2 となるように点 T をとると，ST で長さが 2＋$\sqrt{2}$の直線が書ける。

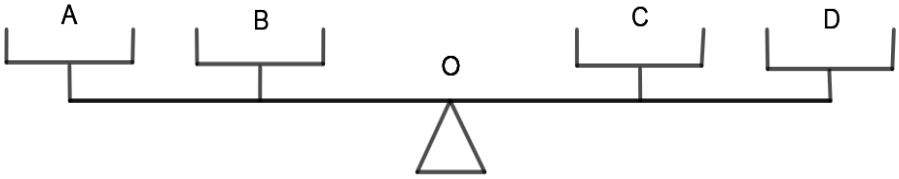


例のようにして（1）で求めた AC の長さと同じものと長さが 2(一辺の長さ)の線分を左の格子にそれぞれ書き(これは採点には含めない)，それを使って正五角形 ABCDE を解答欄（白紙）に作図せよ。なお，線分 AC，AD，CP 及び P は必要がなければ書かなくてよい。ただし，作図途中で使った線は残すこと。

［必要なら自由に使いなさい］

（３）　正五角形 ABCDE の外接円の面積を求めよ。

5　下の図のような支点が O で A，B，C，D の皿を持つ上皿天びんがある。また，B と C はそれぞれ A と O，O と D の中心にある。天びんが整数 X を表すとは次のようなことをいう。



> 重さtの重りを A においたとき$-2t$，B においたとき$-t$，C においたときt，D においたとき $2t$の重さとして，A，B，C，D それぞれの皿に重りをおいたときの重さの和が X である。

たとえば，重さが 1 と 5 の 2 つの重りがあり，重さ 1 の重りを B，重さ 5 の重りを D においたとき，天びんは 9 を表す。

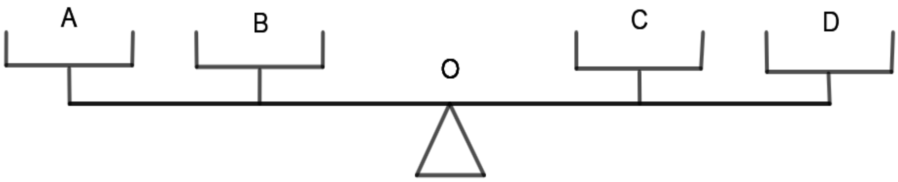
このとき，次の各問いに答えよ。

（1）　重さが 1，5，25 の 3 つの重りを用いて，天びんが 18 を表すような重りの配置を求めよ。

（2）　重さが 1，5，25，125 の 4 つの重りを用いて，天びんが表せるような最大の数を求めよ。

（3）　重さが 5^{n-1}（n は 1 以上の整数）の重りがそれぞれ 1 つずつある。これらの重りを用いて，天びんが整数 N を表せるとする。このとき，天びんが整数 N+1 もこれらの重りを用いて表せることを証明せよ。ただし，使わない重りがあってもよい。

［必要なら自由に使いなさい］



〔以　下　余　白〕